ОТЗЫВ

научного руководителя на диссертационную работу «Изучение свойств решения задачи о распределении тепла в плоскости с трещиной на стыке двух неоднородных материалов» по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Черниковой Анастасии Сергеевны

В работе изучается система из двух уравнений эллиптического типа, каждое из которых описывает стационарное распределение тепла в полуплоскости. Первое из уравнений – в верхней полуплоскости, второе – в нижней. Особенностью задачи является вид условий на границе полуплоскостей. Это условия сопряжения, причем на некотором отрезке принудительно сопряжение нарушается, т.е. как температурное поле, так и тепловой поток на этом отрезке терпят заданный разрыв. Это моделирует задачу о распределении тепла в плоскости, заполненной двумя экспоненциально неоднородными материалами с трещиной на границе сопряжения. Из изложенного ясно, что задача актуальна, как с теоретической, так и с практической точек зрения.

Диссертационная работа состоит из трех глав. В первой главе изучается случай стационарного распределения тепла в плоскости, составленной из двух полуплоскостей, состоящих из неоднородных материалов с различными коэффициентами внутренней теплопроводности, имеющими экспоненциальный вид. На стыке полуплоскостей предполагается наличие конечной трещины.

Предполагается, что в полуплоскостях $\mathbb{R}^2_\pm$ коэффициенты внутренней теплопроводности материалов имеют вид $c_1 e^{k_1 x_2}$, $c_2 e^{k_2 x_2}$, где c_1, c_2 и k_1, k_2 – произвольные положительные константы. При указанных коэффициентах уравнение стационарной теплопроводности может быть записано отдельно в каждой из полуплоскостей

$$\frac{\partial^2 u_p(x)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_p(x)}{\partial x_2^2} + k_p \frac{\partial u_p(x)}{\partial x_2} = 0,\ x \in \mathbb{R}^2_{\operatorname{sgn}(3-2p)},\ p = 1; 2.$$

Граничные условия заданы следующим образом

$$u_1(x_1,+0)-u_2(x_1,-0)=q_0(x_1),\ x_1\in\mathbb{R},$$

$$\frac{\partial u_1(x_1,+0)}{\partial x_2}-\frac{\partial u_2(x_1,-0)}{\partial x_2}=q_1(x_1),\ x_1\in\mathbb{R}.$$

Ограничения, налагаемые на граничные функции $q_0(x_1), q_1(x_1)$ в первой главе, позволяют с помощью преобразования Фурье и метода сведения задачи на границу построить и изучить классическое решение поставленной задачи. При этом выписан и изучен явный вид представления ее решения и исследовано асимптотическое поведение компонент решения и их производных в окрестности границы. Кроме того, в первой главе выполнено сведение изучаемой задачи к обобщенной задаче в пространстве $S'(\mathbb{R}^2)$.

Вторая глава работы посвящена построению асимптотик компонент решения задачи, изучение которой начато в первой главе. Предполагается, что функции $q_0(x_1)$ и $q_1(x_1)$ финитны $(\operatorname{supp} q_0(x_1)=\operatorname{supp} q_1(x_1)=[-1;1])$ и принадлежат пространству $C^4([-1;1])$, но, в отличие от главы 1, не накладываются дополнительные условия $q_p(-1)=q_p(1)=q'_p(-1)=q'_p(1)=0$, что приводит к появлению сингулярных составляющих в асимптотических представлениях первых производных компонент решения $(u_1(x),u_2(x))$ указанной задачи вблизи концов трещины. Это также является причиной того, что в главе рассматривается обобщенное, а не классическое решение изучаемой задачи. Изменяется понятие о смысле выполнения граничных условий. При этом использован оригинальный и интересный подход, в котором граничные функции $q_0(x_1)$ и $q_1(x_1)$ при исследовании асимптотических свойств решения заменяются на другие функции, более удобные для изучение. При этом асимптотические свойства решения не изменяются.

Третья глава посвящена изучению задачи, которую можно считать основной в работе. Здесь, как и при исходной постановке уравнений, коэффициенты внутренней теплопроводности имеют более сложный вид $e^{k_p(x_2)}$, где $p=0;1$. Последняя запись не ограничивает, как легко видеть, коэффициенты теплопроводности лишь экспоненциальным видом и, вообще говоря, лишь гарантируют их положительность. Система уравнений в возникающей при такой постановке краевой задаче имеет переменные коэффициенты, что не мешает автору выписывать точные асимптотические представления решения в окрестности трещины. При исследовании данной задачи использованы все результаты предыдущих глав. Техника исследования достаточно тонкая, содержит большое количество тяжелых аналитических результатов и опирается на метод ВКБ.

Сформулирую свое отношение к работе в целом.

Автору удалось полностью справиться с поставленной задачей, при этом ей был разработан и применен ряд интересных технических приемов.

Результаты исследований А.С. Черниковой полно и своевременно опубликованы с соблюдением требований ВАК и доложены на ряде престижных конференций.

На основании изложенного считаю, что результаты, полученные в работе, подтверждают высокий квалификационный уровень А.С. Черниковой, как исследователя и свидетельствуют об уверенных знаниях автора в области дифференциальных уравнений. В ходе работы над диссертацией А.С. Черникова проявила трудолюбие, настойчивость и хорошие математические способности. Хочу отдельно отметить редкую самостоятельность автора при работе над диссертацией.

Считаю, что диссертационная работа А.С. Черниковой соответствует требованиям, предъявляемым п. 9 Положения ВАК МИНОБРНАУКИ к кандидатским диссертациям, а ее автор – Анастасия Сергеевна Черникова заслуживает присуждения ей ученой степени кандидата физико-математических наук (специальность 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление).

Научный руководитель А.В. Глушко

23 сентября 2015 года